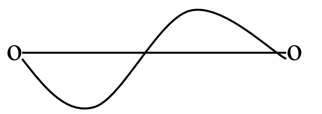
<u>Evolutionäre Lösung des Steinerproblems und der „Seifenhautcomputer“:</u>

Benannt nach Jakob Steiner einem großen Schweizer Mathematiker, der von 1796 bis 1893 lebte.

Das Steinerproblem ist die Suche nach den kleinsten Wegen, die verschiedene Punkte verbinden. (Jeder Punkt muss mit jedem anderen verbunden sein) Die Summe der Wege soll dabei minimal sein.

Bei zwei Punkten ist die kürzeste Verbindung natürlich die Gerade dazwischen.



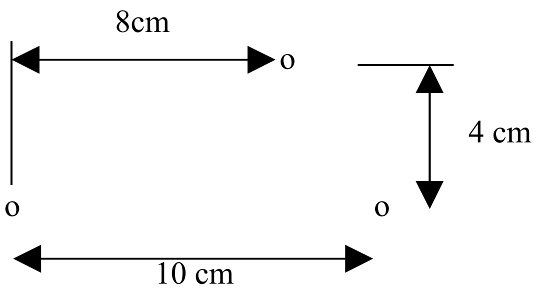
Jeder andere Weg ist länger.

Bei drei Punkten ist der Weg schon nicht mehr so klar.

Solche Probleme treten in der Technik häufig auf:
- Chip-Fertigung. Die Leitungslänge zwischen den Elementen soll minimal sein. (Laufzeit)
- Planung von Telefonnetzen
- Wasserleitungsnetze
- Straßennetze

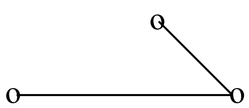
1) <u>Die Lösung bei drei Punkten</u>:

Wir versuchen die optimale Lösung für folgende Anordnung zu finden:



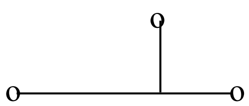
Versucht jetzt in 2-er Gruppen anhand maßstäblicher Zeichnungen den kürzesten Gesamtweg zu finden:

1. Versuch:



Gesamtlänge = ……………………

2. Versuch:



Gesamtlänge = ……………………

1.1) Ein eigener Weg

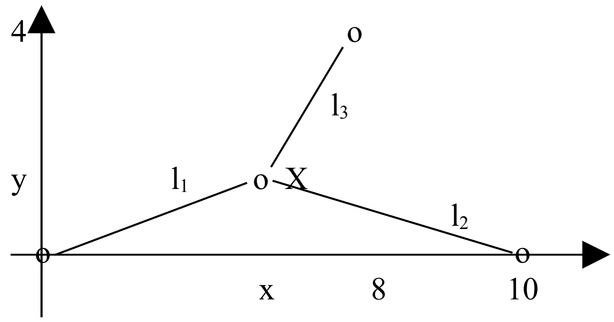
Auf der Tafel die Weglängen sammeln, den Besten vorstellen und eine zweite Runde starten!

1.2) Rechnerische Lösung

Versucht zuerst eine Formel über die drei Weglängen l_1 l_2 l_3 aufzustellen. (Hinweis 3 mal Pythagoras)

Den Verbindungspunkt X kennen wir nicht, weshalb wir für seine Koordinaten allgemein x und y wählen. Die Längen sollen jetzt in diesen Variablen aufgestellt werden.

Wir legen dazu die Punkte folgendermaßen in ein Koordinatensystem:



Wir berechnen gemeinsam l_3 :

$$l_3{}^2 = (8-x)^2 + (4-y)^2$$

$$l_3 = \sqrt{(8-x)^2 + (4-y)^2}$$

Bestimmt jetzt selber l_1 und l_2

$$l_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(10-x)^2 + y^2}$$

Und damit erhalten wir die Gesamtweglänge:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(10-x)^2 + y^2} + \sqrt{(8-x)^2 + (4-y)^2}$$

1.3) Evolutionäre Lösung mit EXCEL

Wir gehen jetzt von einem beliebigen Verbindungspunkt X aus (z.B. X(4/2)) und erzeugen mit dem Zufallsgenerator um diesen Punkt 4 Zufallspunkt die nicht allzu weit entfernt sind. Für alle diese Punkte rechnen wir den Gesamtweg aus und wählen den Punkt mit der kürzesten Gesamtlänge.
Jetzt wiederholen wir den Vorgang, das heißt, dass wir wieder um diesen Punkt Zufallspunkte wählen und den besten Punkt nehmen.

So erreicht man in wenigen „Generationen" die optimale Lösung mit hoher Genauigkeit.

	A	B	C	D
1	**Minimaler Weg**			
2				
3				
4	x =	4		
5	y =	2		
6				
7	**Zufall x**	**Zufall y**	**WEG**	
8	<Formel>	<Formel>	<Formel>	
9	<Formel>	<Formel>	<Formel>	
10	<Formel>	<Formel>	<Formel>	
11	<Formel>	<Formel>	<Formel>	
12				
13	<Formel>	<Formel>	<Formel>	
14				
15		MINIMUM	<Formel>	
16				

Zelle A8: =B4 + Zufallszahl()
Zelle A9: =B4 + Zufallszahl()
Zelle A10: =B4 - Zufallszahl()
Zelle A11: =B4 - Zufallszahl()

Zelle B8: =B5 + Zufallszahl()
Zelle B9: =B5 - Zufallszahl()
Zelle B10: =B5 + Zufallszahl()
Zelle B11: =B5 - Zufallszahl()

In Zelle A13 wird der Anfangswert B4 übernommen, da ja auch er optimal sein kann
In Zelle B13 wird der Anfangswert B5 übernommen, da ja auch er optimal sein kann

In die Zelle C8 kommt jetzt die Formel für die Gesamtweglänge, welche dann runterkopiert wird.

Das Minimum geben wir in der Zelle C15 aus.

Damit das Gerät nicht immer automatisch rechnet, schalten wir diese Option aus:
MP: ***Extras/Optionen/ Berechnung manuell***
Die Berechnung wird jetzt mit F9 erzwungen.

Versuche jetzt wie schnell du an den optimalen Wert (7,59/2,27) herankommst.

1. Verbesserung:

Bei den x,y Werten stellen wir auf 3 Nachkommastellen um. Lästig ist weiters die Suche nach dem Minimum. Dies überlassen wir jetzt dem Gerät

Dazu fügen wir in die Zelle D8 folgende Formel ein:

=WENN(C8=$C$15;"Minimum";"")

Diese Formel kopiert man in D9 - D11 und D13 Jetzt fällt die Suche leichter.

2. Verbesserung:

Zufallszahl() liefert einen zufälligen Wert zwischen 0 und 1. Gerade wenn wir in die Nähe des optimalen Wertes kommen, sollten die Abweichungen kleiner sein. Dazu führen wir ein Feld Feinheit ein.

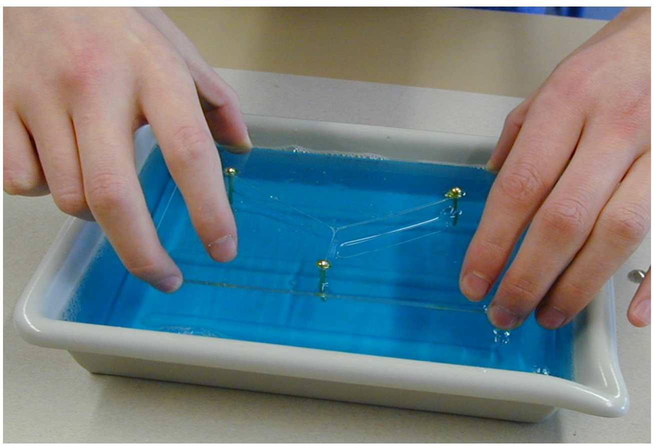
	A	B	C	D	E
1	**Minimaler Weg**				
2					
3					
4	x =	7,59		Feinheit =	0,1
5	y =	2,27			
6					
7	**Zufall x**	**Zufall y**	**WEG**		

Bei der Berechnung aller Zufallswerte berücksichtigen wir jetzt diesen Wert:
=$B$4+ZUFALLSZAHL()*E4

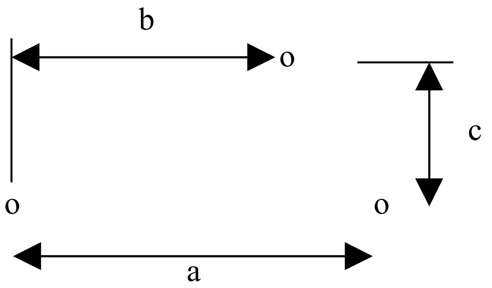
1.4) <u>Das Austesten mit dem „Seifenhautcomputer“</u>

Seifenhäute stellen sich so ein, dass eine Minimalfläche entsteht. Damit kontrollieren wir unser Ergebnis.

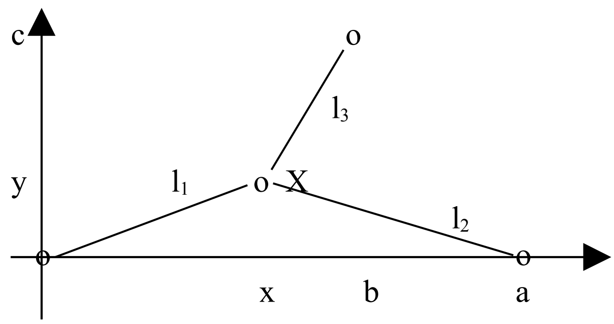
Dazu bohrt man drei Löcher in eine Plexiglasscheibe und steckt drei Nägel hinein. Wenn man jetzt vorsichtig die Anordnung aus einer „Pril“-Lösung herauszieht, entsteht die gesuchte Minimalfläche.



2) Die Erweiterung auf ein beliebiges Dreieck



Stelle jetzt die Formeln mit den Größen a, b, c auf.



In Excel benötigen wir jetzt halt auch noch Zellen für a , b , c

	A	B	C	D	E
1	**Minimaler Weg**				
2					
3					
4	x =	7,59		Feinheit =	0,05
5	y =	2,27			
6					
7	a =	10			
8	b =	8			
9	c =	4			
10					
11	**Zufall x**	**Zufall y**	**WEG**		

2.1) Das Austesten mit dem „Seifenhautcomputer"

Vorgegebene Modelle sollen zuerst ausgemessen werden

a = b = c =

dann ist der Punkt X mit EXCEL zu berechnen und mit Seifenlauge zu überprüfen.

2.2) <u>Automatische Berechnung mit VBA</u>

VBA … Visual Basic for Applications

4	x =	4		Feinheit =	1	
5	y =	2				
6						
7	a =	10				
8	b =	8				
9	c =	4				
10						
11	**Zufall x**	**Zufall y**	**WEG**			
12	4,046345	2,696755	15,5615038			
13	4,033588	1,917271	15,2129403	**Minimum**		
14	3,494565	2,677252	16,1326254			
15	3,218733	1,907589	16,005077			

Dazu erzeugen wir in Tabelle 1 ein MACRO mit folgendem Code:
MP: Extras / Makro / Visual Basic-Editor

```
Sub Durchlauf()
  For  k = 1  To 50
    Calculate
    If Cells(12, 4) = "Minimum" Then
      Cells(4, 2) = Cells(12, 1)
      Cells(5, 2) = Cells(12, 2)
    End If
    If Cells(13, 4) = "Minimum" Then
      Cells(4, 2) = Cells(13, 1)
      Cells(5, 2) = Cells(13, 2)
    End If
    If Cells(14, 4) = "Minimum" Then
      Cells(4, 2) = Cells(14, 1)
      Cells(5, 2) = Cells(14, 2)
    End If
    If Cells(15, 4) = "Minimum" Then
      Cells(4, 2) = Cells(15, 1)
      Cells(5, 2) = Cells(15, 2)
    End If
  Next k
End Sub
```

Nach jedem Programmdurchlauf ändern wir von Hand die Feinheit ab.

2.3) <u>Die Programmelemente</u>

a) Beginn und Ende des Programmteils

```
Sub Durchlauf()
    ................
End Sub
```

b) Eine Schleife, die 50 mal durchlaufen wird

```
For k = 1 To 50
    ………….
Next k
```

c) Eine Abfrage auf Minimum und Übertragung der Werte in die Eingabezeile

_

```
If Cells(12, 4) = "Minimum" Then
  Cells(4, 2) = Cells(12, 1)
  Cells(5, 2) = Cells(12, 2)
End If
```

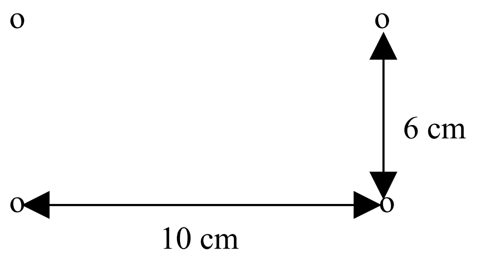
2.4) <u>Automatisierung der Feinheit</u>

Dazu bauen um die vorige Schleife eine weitere die 10 mal durchlaufen wird. Die Feinheit wird dabei jeweils halbiert. *Cells(4, 5) = Cells(4, 5) / 2*

```
Sub Durchlauf()

For i = 1 To 10

    For  k = 1 To 50
       …….
       Wie vorher
       …….
    Next k

    Cells(4, 5) = Cells(4, 5) / 2

Next i

End Sub
```

3) <u>Die Lösung bei vier Punkten</u>:

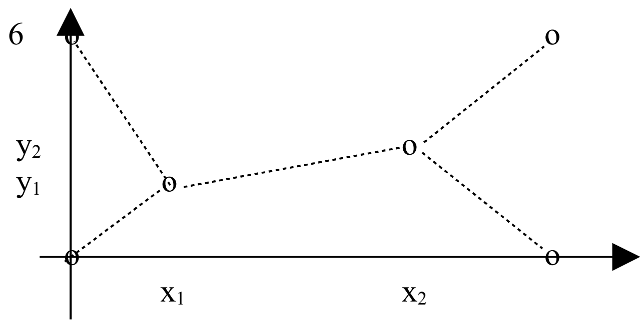
Der Einfachheit halber ordnen wir die vier Punkte in einem Rechteck der Länge 10cm und Breite 6cm an.



Versucht jetzt in 2-er Gruppen anhand <u>maßstäblicher Zeichnungen</u> wieder den kürzesten Gesamtweg zu finden.

3.1) <u>Die Lösung mit EXCEL</u>:

HINWEIS: Beim optimalen Weg treten hier zwei Verbindungspunkte auf

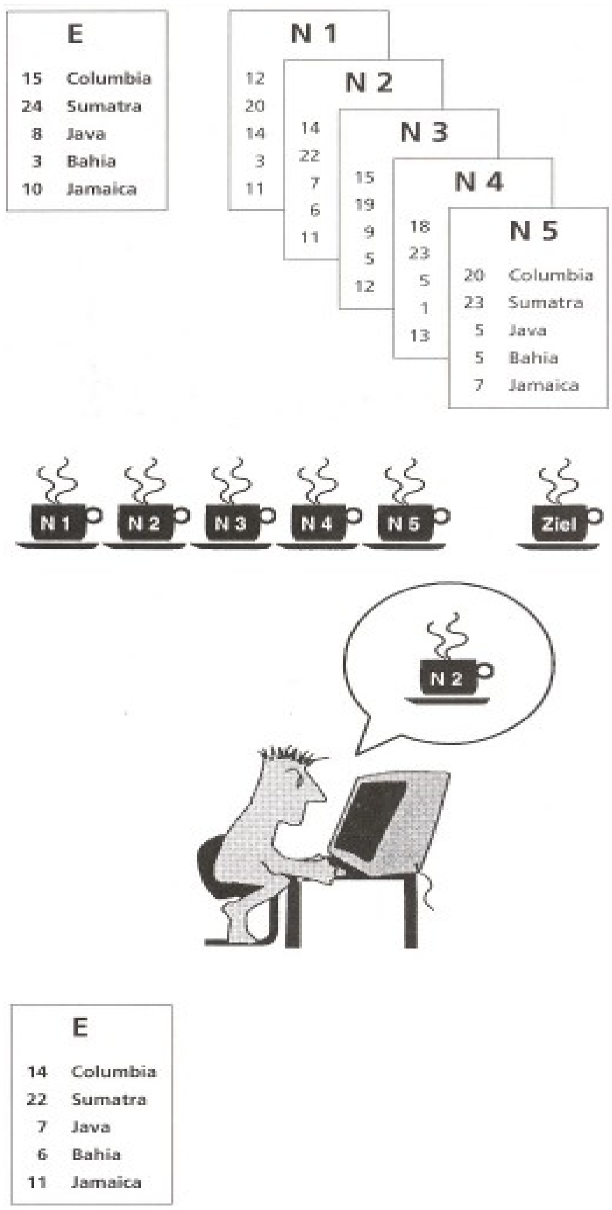


Das Aufstellen der Formeln ist hier schon um einiges schwieriger und auch die Umsetzung in EXCEL:

	A	B	C	D	E	F
1	**Minimaler Weg**					
2						
3	x1 =	1,00				
4	y1 =	2,00		Feinheit=	0,05	
5	x2 =	8,00				
6	y2 =	4,00				
7						
8	**x1**	**y1**	**x2**	**y2**	**Länge**	
9	1,04	2,03	8,04	4,02	20,921205	
10	1,01	1,97	8,01	4,01	20,9513053	
11	0,96	2,03	8,03	4,01	20,9381199	
12	0,99	1,96	8,02	4,01	20,9590782	
13	1,04	2,03	8,00	3,95	20,894871	Minimum
14	1,05	1,99	8,00	3,98	20,9228963	

4) <u>Evolutionsstrategische Mischungsoptimierung</u>:

Solch evolutionstechnische Verfahren werden inzwischen auch zur Optimierung von Bauteilen und bei der Suche nach der optimalen Mischung von Kaffee eingesetzt.



Eine Kaffeemischung sollte ja immer gleich schmecken, die Bohnen sind aber bei jeder Lieferung leicht unterschiedlich.

Deshalb gehen manche Firmen folgendermaßen vor. Sie kennen ja das Ziel, nämlich die gewünschte Geschmacksrichtung.

Jetzt werden im Computer fünf Zufalls-Kaffeemischungen (N1 bis N5) erzeugt.

Die so erzeugten Nachkommen werden vom Kaffeetester einzeln verkostet und bewertet.

Ausgehend von der Mischung die jetzt dem Ziel am nächsten kommt, werden wiederum 5 zufällig abgewandelte Nachkommen erzeugt u.s.w.

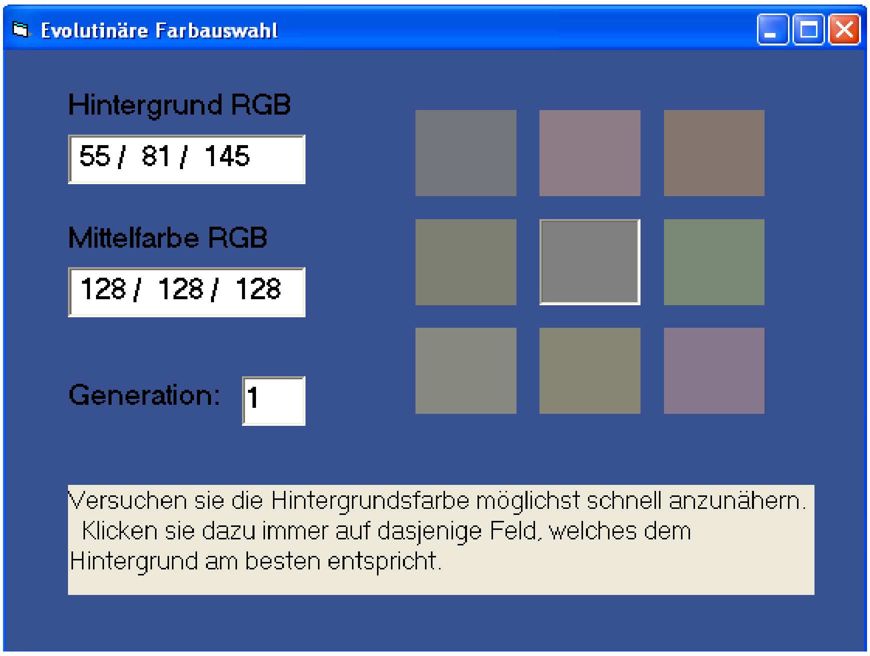
Bildquelle: Bionik-Ausstellungskatalog / Siemens Forum

Zur Demonstration dieses Verfahren habe ich ein Programm geschrieben.

Es wird beim Start eine zufällige Hintergrundsfarbe gewählt.

Ausgehend von der Farbe im mittleren Quadrat werden jetzt 8 „Tochterfarben“ angezeigt. Mit der Maus ist die Beste davon zu wählen, das heißt, diejenige die am Besten der Hintergrundsfarbe entspricht.

Ausgehend von der gewählten Farbe werden neue Tochterfarben erzeugt. Wenn die Farbe genügend genau angenähert wurde, wird der Vorgang beendet.



Das Programm **ev-farb.exe** kann heruntergeladen werden.

Beim zweiten Programm **ev-farb2.exe** berechnet jeweils der Computer die beste Tochterfarbe.

Dazu kann man aus drei Strategien wählen:

- Das Minimum von $dr + dg + db$
- Das Minimum von $dr^2 + dg^2 + db^2$
- Das Minimum von $dr * dg * db$

dr ….. Die Distanz der Rotwerte
dg ….. Die Distanz der Grünwerte
db ….. Die Distanz der Blauwerte

Es ist die schlechteste Strategie zu suchen und auch zu begründen.